Составила: доц. Тарасова Н.В., компьютерная вёрстка: доц. Тарасова Н.В.

МАТЕМАТИКА 5

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Определение гармоники, определение ортогональной системы функций, ортогональность тригонометрической системы функций

Среди периодических функций простейшими являются функции вида $A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$, где k – целое положительное число.

Эти функции называют гармониками. Каждая из них описывает элементарные гармонические колебания с амплитудой A_k, периодом $T = \frac{2\pi}{k\omega}$ и начальной фазой φ_k.

Всякую гармонику можно представить в виде $A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$, где $a_k = A_k \sin\varphi_k$, $b_k = A_k \cos\varphi_k$.

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются ортогональными на промежутке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = 0\,.$$

Теорема.
Любые две функции тригонометрической системы $\{1, \cos\omega t, \sin\omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \cos 3\omega t, \sin 3\omega t...\}$ ортогональны на всяком промежутке вида $[\alpha, \alpha + T]$.

2. Формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье для функции с периодом *T*, общий вид ряда Фурье.

Если *T*– периодическая функция раскладывается в тригонометрический ряд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t, \quad t \in \mathbb{R},$$

(где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - частота), допускающий почленное интегрирование по любому промежутку, то коэффициенты этого ряда однозначно определяются формулами

$$a_k = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos k\omega t\,dt, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\sin k\omega t\,dt, \quad k = 1, 2, ...$$

3. Теорема Дирихле для рядов Фурье.

Если *T*– периодическая функция *f*(*t*), кусочно–монотонна и кусочно–непрерывна на промежутке $[\alpha; \alpha + T]$, то ее ряд Фурье сходится при всех $t \in \mathbb{R}$. При этом его сумма равна *f*(*t*) в точках непрерывности функции и равна $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ в тех точках, где функция имеет разрывы

Условия теоремы часто называют условиями Дирихле.

Также стоит отметить поведение коэффициентов Фурье. При $n \to \infty$ коэффициенты Фурье стремятся к нулю, при этом, если в ряд раскладывается непрерывная функция, то $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, если же в ряд Фурье раскладывается кусочно-непрерывная функция, то коэффициенты убывают медленнее: $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. Особенности ряда Фурье для четной и нечетной функций.

При вычислении коэффициентов можно выбирать любые промежутки интегрирования, главное, чтобы их длина была равна периоду. Выберем симметричный промежуток $[-l; l]$, где $l = T/2$.
Если *f*(*t*) – четная функция, то

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t,$$

где $a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt, \quad b_k = 0.$

Аналогично, если *f*(*t*) – нечетная функция, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t,$$

где $a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt.$

5. Равенство Парсеваля–Стеклова.

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f^2(t)\,dt = T\left(\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\right).$$

6. Таблица изображений по Лапласу функций

$1(t)$, $t^n \cdot 1(t)$, $e^{\alpha t}\cdot 1(t)$, $t^n e^{\alpha t}\cdot 1(t)$, $\sin\beta t \cdot 1(t)$, $\cos\beta t \cdot 1(t)$, $e^{\alpha t}\cos(\beta t)\cdot 1(t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)\cdot 1(t)$, теорема о дифференцировании оригинала, теорема запаздывания.

То, что функция *F*(*p*) является изображением по Лапласу для $f(t)\cdot 1(t)$ обозначается так $F(p) \risingdotseq f(t)\cdot 1(t)$ или так $f(t)\cdot 1(t) \leftrightarrow F(p)$.

Таблица основных изображений

$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

Теорема о дифференцировании оригинала

Если $f(t)\cdot 1(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$f'(t)\cdot 1(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0).$$

Применяя это свойство к первой производной, получим

$$f''(t)\cdot 1(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Для производной n-го порядка имеем:

$$f^{(n)}(t)\cdot 1(t) \leftrightarrow p^n\cdot F(p) - p^{n-1}\cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Теорема запаздывания

Если $f(t)\cdot 1(t) \leftrightarrow F(p)$, то при $\tau \geq 0$

$$f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau) \leftrightarrow F(p)\cdot e^{-p\tau}.$$

7. Дифференцирование по параметру, теорема смещения, теорема интегрирования оригинала

Дифференцирование по параметру

Если $F(p,\alpha) \risingdotseq f(t,\alpha)\cdot 1(t)$, то $F'_\alpha(p,\alpha) \risingdotseq f'_\alpha(t,\alpha)\cdot 1(t)$:

Теорема смещения

Если $F(p) \risingdotseq f(t)\cdot 1(t)$, то $F(p-\alpha) \risingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t} f(t)\cdot 1(t)$.

Теорема интегрирования оригинала

Если $F(p) \risingdotseq f(t)\cdot 1(t)$, то $\int\limits_0^t f(\xi)\,d\xi \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

8. Схема решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциаль-ного уравнения *n*–го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

Уравнение	$\Rightarrow$	решение
$\Downarrow$		$\Uparrow$
уравнение в изобр	$\Rightarrow$	решение в изобр

9. Условия Коши–Римана, определение аналитической функции.

Теорема (условия Коши–Римана, или Коши–Римана–Эйлера– Даламбера**).**

Функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, заданная в области *D*, имеет в точке $z=x+iy\in D$ производную $f'(z)$ тогда и только тогда, когда в этой точке функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы (для дифференцируемости достаточно непрерывности частных производных) и при этом выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция называется регулярной или аналитической в точке, если она регулярна в некоторой области, содержащей эту точку. Иначе говоря, функция аналитическая в точке, если она имеет производную не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности.

10. Интегральная формула Коши.

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной области *D*, ограниченной контуром *L*, то

$$\oint\limits_L f(z)\,dz = 0.$$

11. Что такое изолированная особая точка и вычет в ней?

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует кольцевая окрестность точки z_0 – множество $0<|z-z_0|<\varepsilon$ (его иногда называют также *проколотой окрестностью точки* z_0), в которой функция $f(z)$ однозначна и аналитична. В самой точке z_0 функция либо не определена, либо не является однозначной и аналитичной.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ при приближении к точке z_0 различаются **три** типа особых точек.

Изолированная особая точка называется:

1) *устранимой*, если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
2) *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

3) *существенно особой точкой*, если функция $f(z)$ не имеет предела при $z\to z_0$.

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число

$$\mathrm{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(\zeta)\,d\zeta,$$

где γ – достаточно малая окружность $|z-z_0|=r$; в круге $|z-z_0|\leq r$ нет других особых точек функции $f(z)$.

12. Теорема Коши о вычетах.

Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в области *D* за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда для любой замкнутой области *G* с контуром *L*, лежащей в *D* и содержащей точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ внутри, справедливо равенство

$$\int\limits_L f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathrm{res} f(z_k).$$